الوحدة الثالثة
المحددات والمصفوفات

٣ - ١ المحددات

سبق أن درسنا المصفوفات و المحددات وعلمنا أن كل مصفوفة مربعة لها محدد
ويسمى المحدد ٢ × ٢ بمحدد الرتبة الثانية والمحدد ٣ × ٣ بمحدد الرتبة الثالثة وهكذا.....

وعلمنا أن قيمة محدد الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ء} \end{vmatrix} = \text{أء} - \text{ب ج}$

كمثال: $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = ٢ \times (-١) - ٥ \times ١ = -٢ - ٥ = -٧$

ومحدد الرتبة الثالثة يكون على الصورة $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{س} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ص} \\ \text{ج} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix}$ ويمكن إيجاد قيمته Δ بطريقتين هما:

١) إيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة باستخدام طريقة العوامل المرافقة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{س} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ص} \\ \text{ج} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} = \text{أ} \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ص} \\ \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} - \text{ء} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ص} \\ \text{ج} & \text{ع} \end{vmatrix} + \text{س} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{هـ} \\ \text{ج} & \text{و} \end{vmatrix}$$

تذكر أن:
اشارات العوامل المرافقة هى:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

كمثال: $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٠ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٥ & ٠ & -٢ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix} - ٤ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix}$

$$= ٣(٦ - ٠) - ٤(-٤ - ٥) = ١٨ + ٣٦ = ٥٤$$

٢) إيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة باستخدام طريقة الأقطار:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٠ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ٥ & ٠ & -٢ \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} ٣ & ٤ & ٠ & ٣ & ٤ \\ ٢ & -٣ & ١ & ٢ & -٣ \\ ٥ & ٠ & -٢ & ٥ & ٠ \end{array}$$

قيمة المحدد = مجموع حواصل ضرب القطر الرئيسى والقطران الموزيان له مطروحا منه مجموع حواصل ضرب عناصر القطر الآخر والقطران الموازيان له أى أن:

المحدد $= \{(٣)(-٣)(-٢) + (٤)(١)(٥) + ٠ + ٠\} - \{٠ + ٠ + (٤)(٢)(-٢)\}$

$$= \{١٨ + ٢٠\} - \{-١٦\} = ٣٨ + ١٦ = ٥٤$$

✱ الخواص الأساسية للمحددات:

خاصية ١:

لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد باعمدته المناظرة بنفس الترتيب

📖 مثـــال:

اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

✍ الحـــل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(8-3) - 2(10+1) - 3(15+4) = 5 - 22 - 57 = -74$$

،

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(8-3) - 5(4+9) - 1(2+12) = 5 - 65 - 14 = -74$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

خاصية ٢:

قيمة المحدد لا تتغير إذا تم فكه عن طريق عناصر أى صف (عمود)

📖 مثـــال:

اوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر الصف الأول مرة وباستخدام عناصر العمود الثانى مرة أخرى

الحـــل:

باستخدام عناصر الصف الأول

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(3-4) - 3(9-2) + 1(6-1) = -2 - 21 + 5 = -18$$

باستخدام عناصر العمود الثانى

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(9-2) + 1(6-1) - 2(4-3) = -21 + 5 - 2 = -18$$

خاصية ٣:

قيمة المحدد تنعدم فى الحالتين الأتيتين:

أولا: إذا كانت عناصر أى صف (عمود) كلها اصفار فإن قيمة المحدد تساوى صفر

ثانيا: إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد تساوى صفر

كمثال: المحدد $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ لأنه بفكه بعناصر $ع_1$ ستكون القيمة تساوى صفر

و المحدد $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 4(6-1) - 4(6-1) + 1(-3+3) = 20 - 20 + 0 = 0$ لتساوى $ع_1$ ، $ع_2$

خاصية ٤:

إذا وجد عامل مشترك فى عناصر صف (عمود) فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

مثال:

إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} = ١٠$ أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٢\text{أ} & ٢\text{ء} & ٢\text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ -٤\text{جـ} & -٤\text{و} & -٤\text{ع} \end{vmatrix}$

الحل:

بأخذ ٢ عامل مشترك من $ص_١$ ، -٤ عامل مشترك من $ص_٣$

$$\therefore \begin{vmatrix} ٢\text{أ} & ٢\text{ء} & ٢\text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ -٤\text{جـ} & -٤\text{و} & -٤\text{ع} \end{vmatrix} = -٤ \times ٢ \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{م} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ن} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} = -٤ \times ٢ \times ١٠ = -٨٠$$

ملاحظات:

من الخاصية السابقة نستنتج مايلى:

١) عند ضرب المحدد فى عدد حقيقى ك $\neq$ ٠ يتم ضرب العدد فى عناصر أى صف (عمود)

كمثال:

$$\text{ك} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{كأ} & \text{كب} & \text{كجـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{كب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{كهـ} & \text{و} \\ \text{ل} & \text{كم} & \text{ن} \end{vmatrix}$$

٢) إذا كانت جميع عناصر صف (عمود) هى مضاعفات لعناصر صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد تنعدم

كمثال: المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$

لأن عناصر $ص_٣$ ثلاثة أمثال عناصر $ص_١$ وبإخراج ٣ عامل مشترك ينتج تساوى $ص_١$ ، $ص_٣$

خاصية ٥:

إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد = − قيمة المحدد الأصلى

كمثال: المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$ من المثال صفحة ٧٠

وبتبديل عناصر الصفين الأول والثانى نجد أن:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(9-2) - 1(6-1) + 2(4-3) = 21 - 5 + 2 = 18$$

خاصية ٦:

إذا كتبت جميع عناصر اى صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى كمجموع محددين.

مثال:

أوجد المحدد $م = م_1 + م_2 + م_3$ حيث:

$$م_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} ،\quad م_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} ،\quad م_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$م = م_1 + م_2 + م_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

المحددان الأول والثانى فيهما نفس $ص_1$ ، $ص_3$ وبالتالى يتم جمعهما بعناصر $ص_2$

$$م = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5-1 & -2+5 & 3+2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore م = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

المحددان فيهما نفس $ع_1$ ، $ع_3$ وبالتالى يتم جمعهما بعناصر $ع_2$

$$\therefore م = \begin{vmatrix} 2 & 3-1 & 4 \\ 4 & 3+1 & 5 \\ 0 & 4+1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

خاصية ٧:

إذا أضفنا إلى عناصر أى صف (عمود) مضاعفات صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير

وتعتبر هذه الخاصية أهم الخواص وأكثرها استخداما

مثـــال:

بدون فك المحدد أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & -٧ \\ -٣ & -١ & ٤ \\ ٣ & ١ & -٤ \end{vmatrix}$

الحـــل:

بإضافة عناصر العمود الثانى إلى العناصر المناظرة فى العمود الأول ويعبر عن ذلك بالصورة $ع_١ + ع_٢$

$$\therefore \begin{vmatrix} ٢ & ٥ & -٧ \\ -٣ & -١ & ٤ \\ ٣ & ١ & -٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢+٥ & ٥ & -٧ \\ -٣-١ & -١ & ٤ \\ ٣+١ & ١ & -٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧ & ٥ & -٧ \\ -٤ & -١ & ٤ \\ ٤ & ١ & -٤ \end{vmatrix}$$

بإخراج -١ عامل مشترك من $ع_٣$

$$\therefore \begin{vmatrix} ٢ & ٥ & -٧ \\ -٣ & -١ & ٤ \\ ٣ & ١ & -٤ \end{vmatrix} = -١ \begin{vmatrix} ٧ & ٥ & ٧ \\ -٤ & -١ & -٤ \\ ٤ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = -١ \times ٠ = ٠$$ لتساوى $ع_١$ ، $ع_٣$

خاصية ٨:

إذا ضربنا عناصر اى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى صف (عمود) آخر وجمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساويا صفرا.

كمثال: فى المحدد $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ -١ & -٣ & ٢ \end{vmatrix}$

إذا ضربنا عناصر الصف الأول فى العوامل المرافقة لعناصر الصف الثانى وجمعنا النواتج نـجد أن:

الناتج = ٤(العامل المرافق للعنصر ٣) − ٢(العامل المرافق للعنصر ٢) + ١(العامل المرافق للعنصر − ١)

$$= ٤ \times - \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} + ١ \times - \begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix}$$

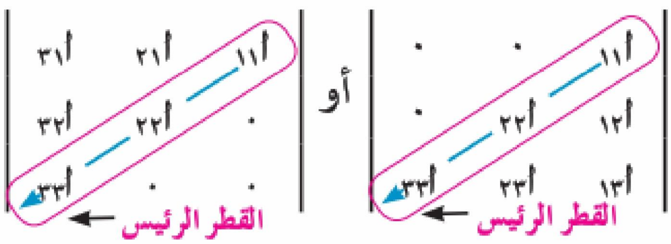
$$= -٤(-٤ + ٣) - ٢(٨ + ١) - ١(-١٢ - ٢) = ٤ - ١٨ + ١٤ = ١٨ - ١٨ = ٠$$

لاحظ أن هذه الخاصية لا تعطى قيمة المحدد

لأن قيمة المحدد تساوى مجموع حاصل ضرب عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقه لنفس عناصر الصف (العمود)

✸ المحدد على الصورة المثلثية:

محدد الصورة المثلثية تكون فيه جميع العناصر أعلى (أسفل) القطر الرئيسى كلها اصفار اى على الصورة:



خاصية ٩:

قيمة المحدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

أى أن قيمة المحدد من الصورة السابقة $= أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$

📖 مثـــال:

بدون فك المحدد اثبت أن $\begin{vmatrix} أ-ب-ج & ٢ب & ٢ج \\ ٢أ & ب-ج-أ & ٢ج \\ ٢أ & ٢ب & ج-أ-ب \end{vmatrix} = (أ + ب + ج)^{٣}$

✍ الحـــل:

بإجراء $ع_{٣} + ع_{٢} + ع_{١}$ نحصل على:

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} أ-ب-ج & ٢ب & أ+ب+ج \\ ٢أ & ب-ج-أ & أ+ب+ج \\ ٢أ & ٢ب & أ+ب+ج \end{vmatrix}$ بإخراج أ + ب+ج عامل مشترك من $ع_{٣}$

$$\therefore \Delta = (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})\begin{vmatrix} \text{أ}-\text{ب}-\text{جـ} & 2\text{ب} & 1 \\ 2\text{أ} & \text{ب}-\text{جـ}-\text{أ} & 1 \\ 2\text{أ} & 2\text{ب} & 1 \end{vmatrix}$$ بإجراء $\text{ص}_1 - \text{ص}_3$ ، $\text{ص}_2 - \text{ص}_3$

$$\therefore \Delta = (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})\begin{vmatrix} -\text{أ}-\text{ب}-\text{جـ} & 0 & 0 \\ 0 & -\text{أ}-\text{ب}-\text{جـ} & 0 \\ 2\text{أ} & 2\text{ب} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})\begin{vmatrix} -(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) & 0 & 0 \\ 0 & -(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) & 0 \\ 2\text{أ} & 2\text{ب} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \times -(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \times -(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) = (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})^3$$

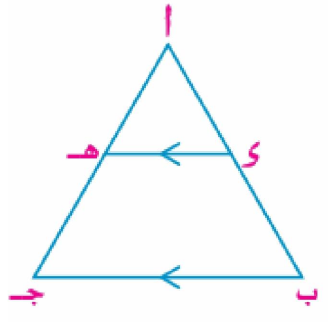
مثـــال: باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 1971 & 1970 \\ 1973 & 1972 \end{vmatrix}$

الحـــل:

$$\begin{vmatrix} 1971 & 1970 \\ 1973 & 1972 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1970+1 & 1970 \\ 1972+1 & 1972 \end{vmatrix}$$ وبكتابة المحدد كمجموع محددين

$$= \begin{vmatrix} 1970 & 1970 \\ 1972 & 1972 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1970 \\ 1 & 1972 \end{vmatrix} = 0 + 1972 - 1970 = 2$$

مثـــال:



فى الشكل المقابل $\overline{\text{دهـ}} // \overline{\text{بجـ}}$ اثبت أن $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{دهـ} & \text{أد} & \text{أهـ} \\ \text{بجـ} & \text{أب} & \text{أجـ} \end{vmatrix} = 0$

الحـــل:

من تشابه المثلثين أدهـ ، أبجـ نـجد أن $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \text{ك}$ حيث ك معامل التشابه

$\therefore$ أد = ك أب ، دهـ = ك بجـ ، أهـ = ك أجـ

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{دهـ} & \text{أد} & \text{أهـ} \\ \text{بجـ} & \text{أب} & \text{أجـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{ك بجـ} & \text{ك أب} & \text{ك أجـ} \\ \text{بجـ} & \text{أب} & \text{أجـ} \end{vmatrix} = \text{ك}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{بجـ} & \text{أب} & \text{أجـ} \\ \text{بجـ} & \text{أب} & \text{أجـ} \end{vmatrix} = \text{ك} \times 0 = 0$$

📖 مثال:

باستخدام خواص المحددات حل المعادلة $\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ س & ١ & س \\ ١ & -١ & س+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢} & ١ \\ -س & س \end{vmatrix}$

✍ الحل:

$$\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ س & ١ & س \\ ١ & -١ & س+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢} & ١ \\ -س & س \end{vmatrix}$$

بإجراء $ع_{٢} + ع_{١} \times س$ فى محدد الطرف الأيمن ، $ع_{٢} + ع_{١}$ فى محدد الطرف الأيسر

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ س & س^{٢}+١ & س \\ ١ & س-١ & س+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢}+١ & ١ \\ ٠ & س \end{vmatrix}$$

$\therefore (س^{٢}+١)(س+١) - س(س-١) = س(س^{٢}+١)$

$\therefore \cancel{س^{٣}} + \cancel{س^{٢}} + س + ١ - \cancel{س^{٢}} + \cancel{س} = \cancel{س^{٣}} + \cancel{س}$ $\quad \therefore س + ١ = ٠ \quad \therefore س = -١$

📖 مثال:

باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة المحدد $م = \begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & س & ١ \\ ١ & ١ & س \end{vmatrix}$

✍ الحل:

$م = \begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & س & ١ \\ ١ & ١ & س \end{vmatrix}$ بإجراء $ع_{٣} + ع_{٢} + ع_{١}$ نحصل على:

$م = \begin{vmatrix} س & ١ & س+٢ \\ ١ & س & س+٢ \\ ١ & ١ & س+٢ \end{vmatrix}$ بأخراج $س + ٢$ عامل مشترك من $ع_{٣}$ نحصل على:

$م = (س+٢)\begin{vmatrix} س & ١ & ١ \\ ١ & س & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ بإجراء $ص_{١} - ص_{٣}$ ، $ص_{٢} - ص_{٣}$ نحصل على:

$$م = (س+2)\begin{vmatrix} س-1 & 0 & 0 \\ 0 & س-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (س+2)(س-1)^2$$

مثـــال:

إثبت أن $\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} = (أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)$

الحـــل:

الأيمن $= \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix}$ بإجراء $ص_3 - ص_1$ ، $ص_2 - ص_1$

$= \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & ب-أ & ب^2-أ^2 \\ 0 & جـ-أ & جـ^2-أ^2 \end{vmatrix}$ بإخراج $(ب-أ)$ ، $(جـ-أ)$ عامل مشترك من $ص_2$ ، $ص_3$

$= (ب-أ)(جـ-أ)\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & 1 & ب+أ \\ 0 & 1 & جـ+أ \end{vmatrix}$ بإجراء $ص_3 - ص_2$

$= (ب-أ)(جـ-أ)\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & 1 & ب+أ \\ 0 & 0 & جـ-ب \end{vmatrix}$

$= (ب-أ)(جـ-أ)(جـ-ب) = (أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ) =$ الطرف الأيسر

تذكر أن:

$ب^2 - أ^2 = (ب-أ)(ب+أ)$ ، $جـ^2 - أ^2 = (جـ-أ)(جـ+أ)$

مثـــــال:

أوجد قيمة ك التى تجعل س أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{ك} & \text{س} \\ \text{ك} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{١} & \text{س} & \text{١} \end{vmatrix}$$

الحـــــل:

س أحد عوامل المحدد تعنى أن قيمة المحدد = صفر عندما س = صفر

∴ $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{ك} & \text{٠} \\ \text{ك} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix}$ = ٠ بإجراء $\text{ع}_{٣}$ − $\text{ع}_{١}$ نحصل على:

∴ $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{ك} & \text{٠} \\ \text{ك−٢} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix}$ = ٠ بالفك بعناصر الصف الثالث ∴ ١ × (ك(ك−٢) − ٣) = ٠

∴ ك^{٢} − ٢ك − ٣ = ٠ ⇐ ∴ (ك−٣)(ك+١) = ٠ ⇐ ∴ ك = ٣ او ك = −١

مثـــــال:

أوجد قيمة ك التى تجعل (س − ٢) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٥} & \text{س + ٣} \\ \text{ك} & \text{ك−٢س} & \text{ك−٤} \\ \text{١} & \text{ك+١} & \text{١} \end{vmatrix}$$

الحـــــل:

(س − ٢) أحد عوامل المحدد تعنى أن قيمة المحدد = صفر عندما س = ٢ ∴ بالتعويض عن س = ٢

∴ $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٥} & \text{٥} \\ \text{ك} & \text{ك−٤} & \text{ك−٤} \\ \text{١} & \text{ك+١} & \text{١} \end{vmatrix}$ = ٠ بإجراء $\text{ع}_{١}$ − $\text{ع}_{٢}$ نحصل على:

∴ $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٥} & \text{٠} \\ \text{ك} & \text{ك−٤} & \text{٠} \\ \text{١} & \text{ك+١} & \text{−ك} \end{vmatrix}$ = ٠ بالفك بعناصر العمود الأول ∴ −ك×(٥ك−٣(ك−٤)) = ٠

∴ −ك(٥ك−٣ك+١٢) = ٠ ⇐ ∴ ك(٢ك+١٢) = ٠ ⇐ ∴ ك = ٠ او ك = −٦

مثـــال:

باستخدام خصائص المحددات أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} \text{جتا}^{٢}\text{س} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{س} \\ \text{جتا}^{٢}\text{ص} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{ص} \\ \text{جتا}^{٢}\text{ع} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{ع} \end{vmatrix}$$

الحـــل:

المحدد $= \begin{vmatrix} \text{جتا}^{٢}\text{س} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{س} \\ \text{جتا}^{٢}\text{ص} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{ص} \\ \text{جتا}^{٢}\text{ع} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{ع} \end{vmatrix}$ باجراء $\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٣}$

$= \begin{vmatrix} \text{جتا}^{٢}\text{س} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} \\ \text{جتا}^{٢}\text{ص} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{ص} + \text{جتا}^{٢}\text{ص} \\ \text{جتا}^{٢}\text{ع} & ١ & \text{جا}^{٢}\text{ع} + \text{جتا}^{٢}\text{ع} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{جتا}^{٢}\text{س} & ١ & ١ \\ \text{جتا}^{٢}\text{ص} & ١ & ١ \\ \text{جتا}^{٢}\text{ع} & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ لتساوى $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ #

تذكر أن: $\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$ ، $\text{جا}^{٢}\text{ص} + \text{جتا}^{٢}\text{ص} = ١$ ، $\text{جا}^{٢}\text{ع} + \text{جتا}^{٢}\text{ع} = ١$

مثـــال:

بدون فك المحدد اثبت أن:

$$\begin{vmatrix} -٣\text{ج} + ٣\text{ج}^{٢} & -٢\text{ج} + ٢\text{ج}^{٢} & ١ \\ ٣\text{ج}^{٢} & ١ + ٢\text{ج}^{٢} & ١ \\ ١ + ٣\text{ج}^{٣} & ٢\text{ج}^{٣} & \text{ج} \end{vmatrix} = ١ + ٢\text{ج} + ٣\text{ج}^{٢}$$

الحـــل:

الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} -٣\text{ج} + ٣\text{ج}^{٢} & -٢\text{ج} + ٢\text{ج}^{٢} & ١ \\ ٣\text{ج}^{٢} & ١ + ٢\text{ج}^{٢} & ١ \\ ١ + ٣\text{ج}^{٣} & ٢\text{ج}^{٣} & \text{ج} \end{vmatrix}$ $\text{ع}_{٢} - \text{ع}_{١} \times ٢\text{ج}^{٢}$ ، $\text{ع}_{٣} - \text{ع}_{١} \times ٣\text{ج}^{٢}$

$= \begin{vmatrix} -٣\text{ج} & -٢\text{ج} & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & \text{ج} \end{vmatrix}$ باجراء $\text{ع}_{١} - \text{ع}_{٣} \times \text{ج}$

$$= \begin{vmatrix} \text{١} + \text{٣}ج^{\text{٢}} & -\text{٢}ج & -\text{٣}ج \\ \text{١} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix}$$ بإجراء $ع_{\text{١}} - ع_{\text{٢}}$

$$= \begin{vmatrix} \text{١} + \text{٣}ج^{\text{٢}} + \text{٢}ج & -\text{٢}ج & -\text{٣}ج \\ \text{٠} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{١} + \text{٢}ج + \text{٣}ج^{\text{٢}}$$ = الطرف الأيسر

مثـــال:

باستخدام خصائص المحددات أوجد قيمة
$$\begin{vmatrix} \text{٠} & -\text{٥} & \text{٦} \\ \text{٥} & \text{٠} & -\text{٢} \\ -\text{٦} & \text{٢} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

الحـــل:

بفرض أن المحدد = م ∴ م = $\begin{vmatrix} \text{٠} & -\text{٥} & \text{٦} \\ \text{٥} & \text{٠} & -\text{٢} \\ -\text{٦} & \text{٢} & \text{٠} \end{vmatrix}$ بأخذ (−١) عامل مشترك من كل صف.

∴ م = $(-\text{١})(-\text{١})(-\text{١}) \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٥} & -\text{٦} \\ -\text{٥} & \text{٠} & \text{٢} \\ \text{٦} & -\text{٢} & \text{٠} \end{vmatrix}$ بتبديل الصفوف والأعمدة

∴ م = $- \begin{vmatrix} \text{٠} & -\text{٥} & \text{٦} \\ \text{٥} & \text{٠} & -\text{٢} \\ -\text{٦} & \text{٢} & \text{٠} \end{vmatrix}$ وهذا هو المحدد الأصلى

∴ م = −م ⟸ ∴ ٢م = ٠ ⟸ ∴ م = ٠

لاحظ أن المحدد السابق هو محدد لمصفوفة شبه متماثلة ومحدد المصفوفة شبه المتماثلة قيمته تساوى صفر

تذكر أن:

١) المصفوفة أ تكون متماثلة إذا كان: $أ = أ^{مد}$ وتكون شبه متماثلة إذا كان: $أ = -أ^{مد}$

٢) المصفوفة شبه المتماثلة تكون عناصر قطرها الرئيسى كلها أصفار والعناصر حول القطر الرئيسى أحدهما معكوس جمعى للآخر

٣ - ٢ المصفوفات

سبق أن درسنا المصفوفات و علمنا أن المصفوفة هى مجموعة من العناصر مرتبة فى صورة صفوف وأعمدة وموضوعة بين القوسين (   ) ويرمز للمصفوفة بأحد الحروف الهجائية

وعلمنا أن نظم المصفوفة يساوى عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن

فالمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

كذلك المصفوفة $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ١- \\ ٣- & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

بينما المصفوفة $جـ = \begin{pmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

✱ المعكوس الضربى للمصفوفة من النظم ٢ × ٢ :

سبق أن درسنا كيفية إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة المربعة على النظم ٢ × ٢

ودرسنا أنه إذا كانت أ ، ب مصفوفتان على النظم ٢×٢

وكان: أ ب = ب أ = I حيث I مصفوفة الوحدة

فإن كل من أ ، ب يكون معكوسا ضربياً للأخرى

وعلمنا أن بعض المصفوفات ليس لها معكوسا ضربيا

وإذا كان للمصفوفة أ معكوسا ضربيا فإننا نرمز له بالرمز $أ^{-١}$ ويكون:

$$أ\,أ^{-١} = أ^{-١}\,أ = I$$

> **تذكر أن**
>
> مصفوفة الوحدة I هى مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسى ١ وباقى العناصر أصفار
>
> $I_٢ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$
>
> $I_٣ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

فإذا كانت المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$

فإن المصفوفة أ يكون لها معكوسا ضربيا إذا كان محددها $\Delta \neq ٠$

وتكون خطوات ايجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ هى:

١) يتم حساب محدد $|أ| = \Delta \neq ٠$

٢) يتم تبديل عناصر القطر الرئيسى وتغيير أشارات القطر الآخر للمصفوفة أ

٣) يتم ضرب المصفوفة الناتجة فى $\frac{١}{\Delta}$ أى أن $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} ء & ب- \\ جـ- & أ \end{pmatrix}$

مثـــال :

أوجد قيم ٲ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٲ & ٩ \\ ٤ & ٲ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوسا ضربيا

الحـــل:

المصفوفة لا يوجد لها معكوس ضربى إذا كان محددها يساوى صفر

$\therefore \begin{vmatrix} ٲ & ٩ \\ ٤ & ٲ \end{vmatrix} = ٠$ $\therefore ٲ \times ٲ - ٩ \times ٤ = ٠$ $\therefore ٲ^٢ = ٣٦$ $\therefore ٲ = \pm ٦$

عندما $ٲ = \pm ٦$ المصفوفة $\begin{pmatrix} ٲ & ٩ \\ ٤ & ٲ \end{pmatrix}$ لا يكون لها معكوسا ضربيا

وعندما $ٲ \in ح - \{\pm ٦\}$ يكون للمصفوفة معكوسا ضربيا

*** المعكوس الضربى للمصفوفة من النظم ٣×٣ :**

مصفوفة العوامل المرافقة:

إذا كانت ٲ مصفوفة على النظم ٣×٣ حيث $ٲ = \begin{pmatrix} ٲ_{١١} & ٲ_{٢١} & ٲ_{٣١} \\ ٲ_{١٢} & ٲ_{٢٢} & ٲ_{٣٢} \\ ٲ_{١٣} & ٲ_{٢٣} & ٲ_{٣٣} \end{pmatrix}$

فإن:العامل المرافق للعنصر $ٲ_{صع}$ هو قيمة المحدد الأصغر الناتج من حذف الصف والعمود الموجود بهما العنصر مضروبا فى $(-١)^{ص+ع}$

فمثلا: العامل المرافق للعنصر $ٲ_{١١}$ ويرمز له بالرمز $م_{١١}$ نحصل عليه بحذف الصف الأول والعمود الأول

فيكون هو $م_{١١} = (-١)^{١+١} \begin{vmatrix} ٲ_{٢٢} & ٲ_{٣٢} \\ ٲ_{٢٣} & ٲ_{٣٣} \end{vmatrix}$

والعامل المرافق للعنصر $ٲ_{٢١}$ ويرمز له بالرمز $م_{٢١}$ نحصل عليه بحذف الصف الأول والعمود الثانى فيكون

هو $م_{٢١} = (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} ٲ_{١٢} & ٲ_{٣٢} \\ ٲ_{١٣} & ٲ_{٣٣} \end{vmatrix}$

والعامل المرافق للعنصر $ٲ_{٣١}$ ويرمز له بالرمز $م_{٣١}$ نحصل عليه بحذف الصف الأول والعمود الثالث فيكون

هو $م_{٣١} = (-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} ٲ_{١٢} & ٲ_{٢٢} \\ ٲ_{١٣} & ٲ_{٣٢} \end{vmatrix}$ ...... وهكذا

وبإيجاد العوامل المرافقة لجميع عناصر المصفوفة نحصل على مصفوفة العوامل المرافقة م

$\therefore$ م $= \begin{pmatrix} م_{١١} & م_{٢١} & م_{٣١} \\ م_{١٢} & م_{٢٢} & م_{٣٢} \\ م_{١٣} & م_{٢٣} & م_{٣٣} \end{pmatrix}$ و الإشارات المستخدمة للمحددات الصغرى هى: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

مثـــال :

أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ $= \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

الحــــل:

نوجد العوامل المرافقة للعناصر باستخدام قاعدة الإشارات السابق ذكرها

$\therefore$ م$_{١١} = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٦ & ٧ \end{vmatrix} = -٢$ ، م$_{٢١} = -\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} = ١٥$ ، م$_{٣١} = \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = -١٢$

، م$_{١٢} = -\begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٦ & ٧ \end{vmatrix} = -٢٥$ ، م$_{٢٢} = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} = ٢٣$ ، م$_{٣٢} = -\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = -٩$

، م$_{١٣} = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١٧$ ، م$_{٢٣} = -\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} = -١٠$ ، م$_{٣٣} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} = ٨$

$\therefore$ مصفوفة العوامل المرافقة هى: م $= \begin{pmatrix} -٢ & ١٥ & -١٢ \\ -٢٥ & ٢٣ & -٩ \\ ١٧ & -١٠ & ٨ \end{pmatrix}$

المصفوفة الملحقة:

هى المصفوفة الناتجة من إيجاد مدور مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ ويرمز لها بالرمز أ^{مل} أى أن:

$$(أ)^{مل} = \begin{pmatrix} م_{١١} & م_{٢١} & م_{٣١} \\ م_{١٢} & م_{٢٢} & م_{٣٢} \\ م_{١٣} & م_{٢٣} & م_{٣٣} \end{pmatrix}^{مد}$$

ففى المثال السابق تكون المصفوفة الملحقة هى:

$$أ^{مل} = م^{مد} = \begin{pmatrix} -٢ & -٢٥ & ١٧ \\ ١٥ & ٢٣ & -١٠ \\ -١٢ & -٩ & ٨ \end{pmatrix}$$

✸ خطوات إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة من النظم ٣ × ٣ :

لإيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ من النظم ٣ × ٣ نتبع الخطوات التالية:

- نوجد محدد المصفوفة أ ويجب أن يكون $|\text{أ}| \neq ٠$
- نكون مصفوفة العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة
- نوجد المصفوفة الملحقة $\text{أ}^{\text{مل}}$ (مدور مصفوفة العوامل المرافقة)
- نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة أ من العلاقة: $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$

تعاريف:

١) المصفوفة المنفردة (الشاذة) هى المصفوفة التى ليس لها معكوس ضربى أى أن محددها = صفر

٢) المصفوفة غير المنفردة (غير الشاذة) هى المصفوفة التى لها معكوس ضربى أى أن محددها ≠ صفر

مثـــال :

أوجد قيمة س التى تجعل كلا من المصفوفات الآتية منفردة

(أ) $\begin{pmatrix} \text{س} - ٣ & ٢ \\ ٧ & \text{س} + ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢\text{س} & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

الحـــل:

(أ) ∵ المصفوفة أ تكون منفردة إذا كان محددها = صفر

$$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{س} - ٣ & ٢ \\ ٧ & \text{س} + ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢) - ١٤ = ٠ \quad \therefore \text{س}^٢ - \text{س} - ٦ - ١٤ = ٠$$

$$\therefore \text{س}^٢ - \text{س} - ٢٠ = ٠ \quad \therefore (\text{س} - ٥)(\text{س} + ٤) = ٠ \quad \therefore \text{س} = ٥ \text{ أو } \text{س} = -٤$$

(ب) ∵ المصفوفة ب تكون منفردة إذا كان محددها = صفر

$$\therefore |\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢\text{س} & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore ٣ \begin{vmatrix} ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٤ & ٤ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٣\text{س} \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ ٣(٢ ١س − ٢س − ٢) + (٨س − ٤س − ٤) + ٣(٤س − ٢ ١س) = ٠

∴ ٣٠س − ٦ + ٤س − ٤ − ٢٤س = ٠

∴ ١٠س − ١٠ = ٠ ∴ ١٠س = ١٠ ∴ س = ١

مثـــال :

أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٠ & −١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{pmatrix}$

الحـــل:

١) نوجد محدد المصفوفة $|أ| = \begin{vmatrix} ٠ & −١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{vmatrix} = ١\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٨ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٠ − ١ = −١$

٢) نوجد مصفوفة العوامل المرافقة

$$م = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix} & −\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٨ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} \\ −\begin{vmatrix} −١ & ١ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٨ \end{vmatrix} & −\begin{vmatrix} ٠ & −١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} −١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} & −\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٠ & −١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$∴ م = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ & −١ \\ ١١ & −٢ & −٢ \\ −٦ & ١ & ١ \end{pmatrix}$$

٣) نوجد المصفوفة الملحقة $أ^{مل} = م^{مد} = \begin{pmatrix} ٤ & ١١ & −٦ \\ ٠ & −٢ & ١ \\ −١ & −٢ & ١ \end{pmatrix}$

٤) نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل}$

$$∴ أ^{-١} = \frac{١}{−١} \times \begin{pmatrix} ٤ & ١١ & −٦ \\ ٠ & −٢ & ١ \\ −١ & −٢ & ١ \end{pmatrix} \Leftarrow ∴ أ^{-١} = \begin{pmatrix} −٤ & −١١ & ٦ \\ ٠ & ٢ & −١ \\ ١ & ٢ & −١ \end{pmatrix}$$

✸بعض خواص معكوس المصفوفة:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان غير منفردتين فإن:

❶ $(\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

❷ $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$ أى أن معكوس معكوس المصفوفة أ يساوى المصفوفة أ

❸ $(\text{أ}^{-1})^{\text{مد}} = (\text{أ}^{\text{مد}})^{-1}$ أى أن مدور المعكوس يساوى معكوس المدور

❹ $(\text{أ}^{-1})^{2} = (\text{أ}^{2})^{-1}$ أى أن مربع المعكوس يساوى معكوس المربع

❺ $(I)^{-1} = I$ أى أن معكوس مصفوفة الوحدة يساوى مصفوفة الوحدة

مثـــال:

إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ فحقق أن $(\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

الحـــل:

$$\because \text{أب} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 5-2 \\ 6+0 & 10+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\text{أب}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 18 = 2$$

$$\therefore (\text{أب})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\because \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \quad \therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\because \text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \therefore |\text{ب}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \quad \therefore \text{ب}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+10 & 2-5 \\ 0-6 & -1+3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

من (1) ، (2) $\therefore (\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

مثـــال :

إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان $(\text{أب})^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ فأوجد ب

الحـــل:

$\because (\text{أب})^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ $\therefore \text{ب}^{-١}\text{أ}^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ بالضرب × أ من جهة اليسار

$\therefore \text{ب}^{-١}\text{أ}^{-١} \times \text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \times \text{أ}$ $\therefore \text{ب}^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ٧ & -٤ \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{ب}^{-١})^{-١} = \begin{pmatrix} ٦ & -٤ \\ ٧ & -٤ \end{pmatrix}^{-١}$ ، $\because |\text{ب}^{-١}| = \begin{vmatrix} ٦ & -٤ \\ ٧ & -٤ \end{vmatrix} = ٤$ $\therefore \text{ب} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} -٤ & ٤ \\ -٧ & ٦ \end{pmatrix}$

مثـــال :

إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ فأثبت أن: $\text{أ}^٢ - ٧\text{أ} - ٨I = \square$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ

الحـــل:

$\because \text{أ}^٢ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩+٢٠ & ٦+٨ \\ ٣٠+٤٠ & ٢٠+١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٩ & ١٤ \\ ٧٠ & ٣٦ \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^٢ - ٧\text{أ} - ٨I = \begin{pmatrix} ٢٩ & ١٤ \\ ٧٠ & ٣٦ \end{pmatrix} - ٧\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix} - ٨\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٩ & ١٤ \\ ٧٠ & ٣٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢١ & -١٤ \\ -٧٠ & -٢٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٨ & ٠ \\ ٠ & -٨ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢٩ & ١٤ \\ ٧٠ & ٣٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢٩ & -١٤ \\ -٧٠ & -٣٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$ وهو المطلوب

$\because \text{أ}^٢ - ٧\text{أ} - ٨I = \square$

$\therefore \text{أ}^٢ - ٧\text{أ} = ٨I$ بالقسمة على ٨ $\therefore \frac{١}{٨}\text{أ}^٢ - \frac{٧}{٨}\text{أ} = I$ بأخذ أ عامل مشترك

$\therefore \text{أ}(\frac{١}{٨}\text{أ} - \frac{٧}{٨}I) = I$ ، $\because \text{أ}\text{أ}^{-١} = I$

$\therefore \text{أ}^{-١} = (\frac{١}{٨}\text{أ} - \frac{٧}{٨}I) = \frac{١}{٨}\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix} - \frac{٧}{٨}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٨} & \frac{٢}{٨} \\ \frac{١٠}{٨} & \frac{٤}{٨} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{٧}{٨} & ٠ \\ ٠ & \frac{٧}{٨} \end{pmatrix}$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-٤}{٨} & \frac{٢}{٨} \\ \frac{١٠}{٨} & \frac{-٣}{٨} \end{pmatrix} = \frac{-١}{٨}\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -١٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

مثـــال :

إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢\text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & -\text{ع} \\ \text{س} & -\text{ص} & \text{ع} \end{pmatrix}$ وكان $\text{أ}^{مد} = \text{أ}^{-1}$ أوجد قيم كل من س ، ص ، ع

الحـــل:

$\because \text{أ}^{مد} = \text{أ}^{-1}$ بضرب الطرفين × أ من جهة اليسار

$\therefore \text{أ}^{مد} \times \text{أ} = \text{أ}^{-1} \times \text{أ}$ ، $\because \text{أ}^{-1} \times \text{أ} = I$ $\therefore \text{أ}^{مد} \times \text{أ} = I$

$$\therefore \begin{pmatrix} ٠ & \text{س} & \text{س} \\ ٢\text{ص} & \text{ص} & -\text{ص} \\ \text{ع} & -\text{ع} & \text{ع} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ & ٢\text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & -\text{ع} \\ \text{س} & -\text{ص} & \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} ٠ + \text{س}^٢ + \text{س}^٢ & ٠ + \text{س ص} - \text{س ص} & ٠ - \text{س ع} + \text{س ع} \\ ٠ + \text{ص س} - \text{ص س} & ٤\text{ص}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ص}^٢ & ٢\text{ص ع} - \text{ص ع} - \text{ص ع} \\ ٠ - \text{ع س} + \text{ع س} & ٢\text{ع ص} + \text{ع ص} - \text{ع ص} & \text{ع}^٢ + \text{ع}^٢ + \text{ع}^٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} ٢\text{س}^٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٦\text{ص}^٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣\text{ع}^٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$\therefore ٢\text{س}^٢ = ١$ $\quad \therefore \text{س}^٢ = \frac{١}{٢}$ $\quad \therefore \text{س} = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

، $٦\text{ص}^٢ = ١$ $\quad \therefore \text{ص}^٢ = \frac{١}{٦}$ $\quad \therefore \text{ص} = \pm \frac{١}{\sqrt{٦}}$

، $٣\text{ع}^٢ = ١$ $\quad \therefore \text{ع}^٢ = \frac{١}{٣}$ $\quad \therefore \text{ع} = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

٣ - ٣ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

✷ أنظمة المعادلات الخطية:

المعادلات الخطية هى معادلات الدرجة الأولى وباستخدام ضرب المصفوفات يمكن حل عدد (ن) من المعادلات الخطية التى تحتوى على (ن) من المتغيرات والتى لها حل وحيد عندما تكون ن = ٢ أو ن = ٣

أى أنه يمكن حل معادلتين فى متغيرين أو ٣ معادلات فى ٣ متغيرات

فإذا كان نظام المعادلات الخطية كالآتى:

$أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ ع = د_١$ ، $أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ ع = د_٢$ ، $أ_٣ س + ب_٣ ص + جـ_٣ ع = د_٣$

فإن المعادلات يمكن كتابتها على صورة مصفوفية كالآتى:

$$\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} د_١ \\ د_٢ \\ د_٣ \end{pmatrix}$$

أى على الصورة المصفوفية $أ \, س = ب$

حيث $أ = \begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة المعاملات

، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ هى مصفوفة المتغيرات ، $ب = \begin{pmatrix} د_١ \\ د_٢ \\ د_٣ \end{pmatrix}$ هى مصفوفة الثوابت

وإذا كان محدد المصفوفة $أ \neq ٠$ فإنه يمكن إيجاد حل المعادلات باستخدام المعكوس الضربى

وذلك بضرب الطرفين من اليمين فى المعكوس الضربى للمصفوفة أ ويكون الحل هو:

$$س = أ^{-١} \, ب$$

أى أن الحل هو حاصل ضرب المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات فى مصفوفة الثوابت

ملاحظة هامة:

قبل كتابة المعادلات على الصورة المصفوفية $أ \, س = ب$ يجب التأكد من الآتى:

- المعادلات بنفس ترتيب الرموز
- الحدود المطلقة فى الطرف الأيسر للمعادلات

مثـــال :

حل المعادلات الأتية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة:

٢س − ٣ص − ع = ٩ ، س + ٢ص + ٣ع = ١٥ ، س − ٢ع = ١٢

الحـــل:

اولا : نكتب المعادلة المصفوفية أ س = ب حيث:

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} ، \quad \text{ب} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

ثانيا: نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة أ باستخدام العوامل المرافقة

١) محدد أ = Δ = $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ وذلك باستخدام الصف الثالث

$$\therefore \Delta = (-9+2) - 2(4+3) = -7 - 14 = -21$$

٢) مصفوفة العوامل المرافقة م =

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{م} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -6 & -3 & -3 \\ -7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

٣) المصفوفة الملحقة أ$_{\text{مل}}$ = م$^{\text{مد}}$ =

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 5 & -3 & -7 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

٤) المعكوس الضربى للمصفوفة

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}_{\text{مل}} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 5 & -3 & -7 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

ثالثاً: حل المعادلات هو : $\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ب}$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix} = \frac{-1}{21}\begin{pmatrix}-4 & -6 & -7\\ 5 & -3 & -7\\ -2 & -3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ 15\\ 12\end{pmatrix} = \frac{-1}{21}\begin{pmatrix}-4\times 9-6\times 15-7\times 12\\ 5\times 9-3\times 15-7\times 12\\ -2\times 9-3\times 15+7\times 12\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix} = \frac{-1}{21}\begin{pmatrix}-210\\ -84\\ 21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ س $= 10$ ، ص $= 4$ ، ع $= -1$ $\therefore$ مجموعة الحل $= \{(10 ، 4 ، -1)\}$

لاحظ أن المعادلات السابقة يمكن حلها بالمحددات باستخدام طريقة كرامر كما يمكن التأكد من صحة الحل باستخدام الآلة الحاسبة.

✱ نظام المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة:

المعادلات الخطية تكون متجانسة إذا كان الحد المطلق لكل معادلة يساوى صفر وبالتالى يكون كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت يساوى صفر

وتكون المعادلات الخطية غير متجانسة إذا كان أحد الحدود المطلقة لا يساوى صفر وبالتالى يكون أحد عناصر مصفوفة الثوابت لايساوى صفر

✱ مرتبة المصفوفة:

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لاتساوى صفر

فإذا كانت المصفوفة (أ) غير صفرية على النظم $م \times ن$ حيث $م \le ن$

فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز لها بالرمز ر (أ) حيث $1 \le$ ر (أ) $\le ن$

مثـــال :

اوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية:

$$\text{أ} = \begin{pmatrix}2 & 7 & -3\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{pmatrix}1.5 & 3 & 9\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

الحـــل:

$\because$ أ $= \begin{pmatrix}2 & 7 & -3\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم 2×3

$\therefore$ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٢ وعدد هذه المحددات ٣ وأحد هذه المحددات هو:

$\begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ - ٢١ = -١١ \neq ٠$

∵ قيمة أحد محددات الدرجة الثانية لاتساوى صفر ∴ ر (أ) = ٢

∵ ب = $\begin{pmatrix} ١,٥ & ٣ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٢ والمحددات هى:

$\begin{vmatrix} ١,٥ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٣ - ٣ = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ١٨ - ١٨ = ٠$ ، $\begin{vmatrix} ١,٥ & ٩ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = ٩ - ٩ = ٠$

∵ قيمة كل محددات الدرجة الثانية تساوى صفر ∴ ر (ب) < ٢ ∴ ر (ب) = ١

مثـــال:

اوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية:

أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{pmatrix}$

الحـــل:

∵ أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٣ والمحدد هو:

$\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٣(٥ - ٦) = -٣ \neq ٠$

∵ قيمة محدد الدرجة الثالثة لاتساوى صفر ∴ ر (أ) = ٣

∵ ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٣ والمحدد هو:

$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$ بإخراج ٣ عامل مشترك من $ص_٣$ ينتج أن $ص_١ = ص_٣$

∵ قيمة محدد الدرجة الثالثة تساوى صفر ∴ ر(ب) < ٣

نوجد أى محدد من الدرجة الثانية ∴ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ - ٢١ = -١٣ \neq ٠$

∵ قيمة أحد محددات الدرجة الثانية لاتساوى صفر ∴ ر(ب) = ٢

ملاحظات:

١) إذا كانت مصفوفة الوحدة I على النظم م × م فإن مرتبة I تساوى م
٢) مرتبة المصفوفة الصفرية تساوى صفر
٣) مرتبة المصفوفة أ = مرتبة المصفوفة أ^مد
٤) إذا إضيف (أوحذف) صف (عمود) صفرى على المصفوفة فإن رتبتها لاتتغير
٥) إذا إضيف (أوحذف) صف (عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن رتبة المصفوفة لاتتغير

مثــــال:

إذا كانت: $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ وكان ر(أ) = ٢ أوجد قيمة ك الحقيقية

الحـــل:

∵ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٣ والمحدد هو:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ك & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ك & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$= ٢(٠ - ٤) - ١(-ك - ٢) + ٣(٤ك - ٠)$

$= -٨ + ك + ٢ + ١٢ك = ١٣ك - ٦$

∵ ر(أ) = ٢ ∴ قيمة محدد الدرجة الثالثة تساوى صفر

∴ ١٣ك − ٦ = ٠ ∴ ١٣ك = ٦ ∴ $ك = \frac{٦}{١٣}$

✱ المصفوفة الموسعة:

إذا كان نظام المعادلات الخطية يتكون من م من المعادلات فى ن من المجاهيل

فإن هذه المعادلات تكتب على الصورة أ س = ب حيث أ مصفوفة المعاملات ، ب مصفوفة الثوابت

وبالتالى يمكن تعريف المصفوفة الموسعة أ* حيث **أ* = (أ | ب)** وتكون على النظم م × (ن + ١)

أى أن المصفوفة الموسعة تتكون من مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت

🕮 مثـــال:

اوجد مرتبة المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية:

(أ) ٣س + ٢ص = ٤ ، ٢س + ٣ص = −٦

(ب) ٣س − ٥ص = ٢ ، ٩س + ١٥ص = ١٠

✎ الحـــل:

(أ) ∵ ٣س + ٢ص = ٤ ، ٢س + ٣ص = −٦

∴ $أ^* = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & | & ٤ \\ ٢ & ٣ & | & -٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٢ وعدد هذه المحددات ٣ وأحد هذه المحددات هو:

$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ٤ = ٥ \neq ٠$

∵ قيمة أحد محددات الدرجة الثانية لاتساوى صفر ∴ ر(أ*) = ٢

(ب) ٣س − ٥ص = ٢ ، ٩س + ١٥ص = ١٠

∴ $أ^* = \begin{pmatrix} ٣ & -٥ & | & ٢ \\ ٩ & ١٥ & | & ١٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٢ وعدد هذه المحددات ٣ وأحد هذه المحددات هو:

$\begin{vmatrix} ٣ & -٥ \\ ٩ & ١٥ \end{vmatrix} = ٤٥ + ٤٥ = ٩٠ \neq ٠$

∵ قيمة أحد محددات الدرجة الثانية لاتساوى صفر ∴ ر(أ*) = ٢

✷ إمكانية حل أنظمة المعادلات:

أولا: المعادلات غير المتجانسة:

المعادلة غير المتجانسة هى المعادلة التى يكون حدها المطلق لا يساوى صفر

وتكتب المعادلات غير المتجانسة بالصورة المصفوفية أ س = ب حيث ب ≠ ▭

وإذا كان عدد المعادلات غير المتجانسة = عدد المجاهيل = ن ولمعرفة إمكانية حل هذه المعادلات

نوجد مرتبة كل من المصفوفة أ والمصفوفة الموسعة $أ^*$ ويكون لدينا الحالات الآتية:

الحالة	إمكانية الحل
ر(أ) = ر($أ^*$) تساوى عدد المجاهيل	يوجد حل وحيد
ر(أ) = ر($أ^*$) أقل من عدد المجاهيل	يوجد عدد لانهائى من الحلول
ر(أ) ≠ ر($أ^*$)	لايوجد حل على الإطلاق

المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل:

إذا كانت المعادلات الخطية هى:

$أ_1$س + $ب_1$ص + $جـ_1$ع = $ك_1$ ، $أ_2$س + $ب_2$ص + $جـ_2$ع = $ك_2$ ، $أ_3$س + $ب_3$ص + $جـ_3$ع = $ك_3$

فإن هذه المعادلات يمكن كتابتها على الصورة المصفوفية أ س = ب

حيث $أ = \begin{pmatrix} أ_1 & ب_1 & جـ_1 \\ أ_2 & ب_2 & جـ_2 \\ أ_3 & ب_3 & جـ_3 \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ك_1 \\ ك_2 \\ ك_3 \end{pmatrix}$

$$\therefore أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} أ_1 & ب_1 & جـ_1 & ك_1 \\ أ_2 & ب_2 & جـ_2 & ك_2 \\ أ_3 & ب_3 & جـ_3 & ك_3 \end{array}\right)$$

وبحساب مرتبة كل من المصفوفة أ والمصفوفة الموسعة $أ^*$ يكون لدينا الحالات الآتية:

ر($أ^*$)	ر(أ)	إمكانية الحل
٣	٣	يوجد حل وحيد
٣	٢	لايوجد حل على الإطلاق
٣	١	لايوجد حل على الإطلاق
٢	٢	يوجد عدد لانهائى من الحلول
٢	١	لايوجد حل على الإطلاق
١	١	يوجد عدد لانهائى من الحلول

ثانيا: المعادلات المتجانسة:

المعادلة المتجانسة هى المعادلة التى يكون حدها المطلق يساوى صفر

وتكتب المعادلات المتجانسة بالصورة المصفوفية $\text{أ}\,\text{س} = \square$

وفى المعادلات المتجانسة تكون مرتبة مصفوفة المعاملات أ هى نفسها مرتبة المصفوفة الموسعة أ^*

أى أن $ر(\text{أ}) = ر(\text{أ}^*)$ لذلك نكتفى بحساب مرتبة المصفوفة أ ويكون لدينا الحالتان الآتيتان:

١) إذا كانت مرتبة المصفوفة أ = عدد المجاهيل فإن مجموعة المعادلات لها حل وحيد

وهذا الحل هو: $س_١ = س_٢ = س_٣ = \cdots = س_ن = ٠$ ويسمى بالحل الصفرى أو الحل البديهى

٢) إذا كانت مرتبة المصفوفة أ > عدد المجاهيل فإن مجموعة المعادلات لها عدد لانهائى من الحلول

مثـــال:

ابحث إمكانية حل مجموعة المعادلات الأتية:

٤س + ٣ص − ٥ع = ٦ ، ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ ، ٥س − ٢ص − ٧ع = ١

ثم أوجد الحل (أن وجد) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحـــل:

$\because \text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix}$ $\therefore \text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٤ & ٣ & -٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ٤ & ١٢ \\ ٥ & -٢ & -٧ & ١ \end{array}\right)$

$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{vmatrix} = ٤(-١٤ + ٨) - ٣(-٢١ - ٢٠) - ٥(-٦ - ١٠) = ١٧٩ \neq ٠$

$\therefore ر(\text{أ}) = ٣$ ، $ر(\text{أ}^*) = ٣$ لأن محدد أ هو أحد محددات الدرجة الثالثة فى أ^*

$\therefore ر(\text{أ}) = ر(\text{أ}^*) = ٣ =$ عدد المجاهيل $\therefore$ مجموعة المعادلات لها حل وحيد

الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة أ ١) محدد أ = ١٧٩

٢) مصفوفة العوامل المرافقة

$$م = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ -٢ & -٧ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & -٧ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ ٥ & -٧ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ٣ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{م} = \begin{pmatrix} ١٦- & ٤١ & ٦- \\ ٢٣ & ٣- & ٣١ \\ ١- & ٣١- & ٢٢ \end{pmatrix}$$

٣) المصفوفة الملحقة $\text{أ}^{\text{مل}} = \text{م}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢٢ & ٣١ & ٦- \\ ٣١- & ٣- & ٤١ \\ ١- & ٢٣ & ١٦- \end{pmatrix}$

٤) المعكوس الضربى للمصفوفة $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} ٢٢ & ٣١ & ٦- \\ ٣١- & ٣- & ٤١ \\ ١- & ٢٣ & ١٦- \end{pmatrix}$

حل المعادلات هو : $\text{س} = \text{أ}^{-١}\ \text{ب}$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} ٢٢ & ٣١ & ٦- \\ ٣١- & ٣- & ٤١ \\ ١- & ٢٣ & ١٦- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ \\ ١٢ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} ١\times٢٢ + ١٢\times٣١ + ٦\times٦- \\ ١\times٣١ - ١٢\times٣ - ٦\times٤١ \\ ١\times١ - ١٢\times٢٣ + ٦\times١٦- \end{pmatrix} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} ٣٥٨ \\ ١٧٩ \\ ١٧٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١ $\therefore$ مجموعة الحل = {(٢ ، ١ ، ١)}

مثال :

بين أن للنظام: ٢س + ص − ع = ٠ ، س − ع = ٠ ، ٢ص + ع = ٠ حلا صفريا فقط

الحل:

$\because \text{أ} = \begin{pmatrix} ١- & ١ & ٢ \\ ١- & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١- & ١ & ٢ \\ ١- & ٠ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$ وباستخدام عناصر العمود الأول

$\therefore |\text{أ}| = ٢(٠ + ٢) - ٢(١ + ٢) = ٤ - ٦ = -٢ \neq ٠$ $\therefore$ ر(أ) = ٣ = عدد المجاهيل

$\therefore$ النظام له حل وحيد وهو الحل الصفرى وهو س = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٠

مثـــال :

بين أن للنظام: ٢س + ٣ص + ٥ع = ٠ ، ٧س + ٤ص − ٢ع = ٠ ، ٦س + ٩ص + ١٥ع = ٠

عددا لانهائيا من الحلول واكتب صورة الحل

الحـــل:

∵ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$

لأنه بإخراج ٣ عامل مشترك من $ص_٣$ ينتج أن $ص_١ = ص_٣$

∵ قيمة محدد الدرجة الثالثة تساوى صفر ∴ ر (أ) < ٣

نوجد أى محدد من الدرجة الثانية ∴ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ - ٢١ = -١٣ \neq ٠$

∵ قيمة أحد محددات الدرجة الثانية لاتساوى صفر ∴ ر (أ) = ٢ أقل من عدد المجاهيل

∴ النظام له عدد لانهائى من الحلول

لإيجاد صور الحل نضع س = ل فى المعادلة الأولى والثانية

∴ ٣ص + ٥ع = −٢ل ، ٤ص − ٢ع = −٧ل بضرب الأولى × ٢ والثانية × ٥

∴ ٦ص + ١٠ع = −٤ل ، ٢٠ص − ١٠ع = −٣٥ل بالجمع

∴ ٢٦ص = −٣٩ل ∴ $ص = \frac{-٣٩}{٢٦}ل$ ∴ $ص = \frac{-٣}{٢}ل$ بالتعويض فى(٢)

$٤ \times \frac{-٣}{٢}ل - ٢ع = -٧ل$ ∴ −٢ع = −٧ل + ٦ل = −ل ∴ $ع = \frac{١}{٢}ل$

∴ صورة الحل هى $(ل ، \frac{-٣}{٢}ل ، \frac{١}{٢}ل)$

مثـــال :

أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات:

كس + ص + ع = ١ ، س + كص + ع = ١ ، س + ص + كع = ١ عدد غير منته من الحلول

الحـــل:

بكتابة المعادلات على الصورة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} \text{ك} & 1 & 1 \\ 1 & \text{ك} & 1 \\ 1 & 1 & \text{ك} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} \text{ك} & 1 & 1 \\ 1 & \text{ك} & 1 \\ 1 & 1 & \text{ك} \end{pmatrix} ، \quad \text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \text{ك} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{ك} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \text{ك} & 1 \end{array}\right)$$

لكى يكون للمعادلات عدد غير منته من الحلول فإن $\text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*) < 3$ إى أقل من عدد المجاهيل

$$\because |\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{ك} & 1 & 1 \\ 1 & \text{ك} & 1 \\ 1 & 1 & \text{ك} \end{vmatrix} = \text{ك}(\text{ك}^2 - 1) - 1(\text{ك} - 1) + 1(1 - \text{ك}) = (\text{ك} - 1)\{\text{ك}(\text{ك} + 1) - 1 - 1\}$$

$$= (\text{ك} - 1)(\text{ك}^2 + \text{ك} - 2) = (\text{ك} - 1)(\text{ك} - 1)(\text{ك} + 2)$$

وبوضع $|\text{أ}| = 0 \quad \therefore (\text{ك} - 1)(\text{ك} - 1)(\text{ك} + 2) = 0 \quad \therefore \text{ك} = 1$ أو $\text{ك} = -2$

عند $\text{ك} = 1 \quad \therefore |\text{أ}| = 0 \quad 1 \le \text{ر}(\text{أ}) < 3$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ، \quad \text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\because$ جميع محددات الدرجة الثانية لكل من أ ، أ^* تساوى صفر

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*) = 1 \quad \therefore$ يوجد عدد غير منته من الحلول عند $\text{ك} = 1$

عند $\text{ك} = -2 \quad \therefore |\text{أ}| = 0 \quad \therefore 1 \le \text{ر}(\text{أ}) < 3$

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} ، \quad \because \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \ne 0 \quad \therefore \text{ر}(\text{أ}) = 2$$

$$، \quad \text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$، \because \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(-2 - 1) - 1(1 - 1) + 1(1 + 2) = 6 + 3 = 9 \ne 0 \quad \therefore \text{ر}(\text{أ}^*) = 3$$

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) \ne \text{ر}(\text{أ}^*) \quad \therefore$ لايوجد حل للمعادلات عند $\text{ك} = -2$

$\therefore$ القيمة التى تجعل للمعادلات عدد غير منته من الحلول هى $\text{ك} = 1$